Fortsatta Prolegomena

om Multiplikation,

med Vidtberömda Filosofiska Fakultetens minne,

under skydd

af

Mag. CARL JOH. Ds. HILL,

Prof. i Math.

till Lagerkransens vinnande

försvaradt i stora Auditorium

den 11 Juni 1844

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

af

GUSTAF WILH. JOH. von DÜBEN,

Filosofie Kandidat af Södermanländska Nationen.

IV.

Lund,
tryckt uti Berlingska Boktryckeriet,
1844.

J. De finnas, och vi skole straxt visa att deras antal är oändligt. Men dessförinnan måste vi erinra, att hvar och en af dessa låter triplera sig, eller ger ännu 2 till.

Om nemligen någorstädes förekommer $n \odot a$, så kunna vi i dess ställe sätta α, hvarefter equationen $n \odot a = \alpha$ kan lösas antingen i anseende till a eller till n, hvarigenom man får dels $a = \overline{n} \odot \alpha$ och dels $n = \alpha \overline{\odot a}$ (eller $a = n^{-} \odot \alpha$, och $n = \alpha \odot^{-} a$), om vi vilje beteckna dessa lösningar på detta sätt. Likaledes om $n \odot b = \beta = r \odot a$, så blir omvändt dels $n = \beta \odot \overline{b}$, $r = \beta \odot \overline{a}$, och dels $b = \overline{n} \odot \beta$, $a = \overline{r} \odot \beta$. Af dessa värden kan än det ena, än det andra begagnas, hvarigenom följande allmänna nya satser uppkomma:

1') Om $a = b$, så $\overline{n \odot} a = \overline{n \odot} b$ (eller åtminstone $\overline{n \odot} a | \overline{n \odot} I = \overline{n \odot} b$)

2') $\overline{n \odot} (\alpha | \beta) = (\overline{n \odot} \alpha) | (\overline{n \odot} \beta)$

Cor. $\overline{n \odot} (r \odot \alpha) = r \odot (\overline{n \odot} \alpha)$

och $\overline{n \odot} (\overline{r \odot} \alpha) = \overline{r \odot} (\overline{n \odot} \alpha)$

3') $\overline{n \odot} (\alpha \lceil \beta) = (\overline{n \odot} \alpha) \lceil (\overline{n \odot} \beta)$

4') Om $\overline{n \odot} \alpha = \overline{r \odot} \beta$ så $= \overline{(n + r) \odot} (\alpha | \beta)$

5') . . . . också $= \overline{(n - r) \odot} (\alpha \lceil \beta)$

Cor. 4') $\overline{n \odot} \beta = \overline{(n . r) \odot} (r \odot \beta)$

1'') Om $a = b$, så är ock $a \odot c = b \odot c$, samt tvärtom $a \overline{\odot c} = b \odot^{-} c$, (så vida icke $c = I$ eller $= m^{-} \odot I$)

2'') Om $\alpha \overline{\odot a} = \beta \overline{\odot b}$, så $= \alpha | \beta \overline{\odot (a | b)}$

Cor. $\alpha \overline{\odot a} = (m \odot \alpha) \overline{\odot (m \odot a)}$

och $(\alpha \overline{\odot a}) \odot \beta = (\beta \overline{\odot a}) \odot \alpha$.

3'') Om $\alpha \overline{\odot a} = \beta \overline{\odot b}$, så $= (\alpha \lceil \beta) \overline{\odot (a \lceil b)}$

4'') $(\alpha | \beta) \overline{\odot a} = (\alpha \overline{\odot a}) + (\beta \overline{\odot a})$

5'') $(\alpha \lceil \beta) \overline{\odot a} = (\alpha \overline{\odot a}) - (\beta \overline{\odot a})$

Cor. 4'') $n . (\alpha \overline{\odot a}) = (n \odot \alpha) \overline{\odot a}$.

Sålunda få vi inalles 21 satser om hvarje product; dock då des motsats eller hvarje allmän aliquot $\overline{n \odot} a$ kan sättas under formen $\frac{1}{n} \odot a$ och således i producten (med bråkfactor) är inbegripen, så minskas antalet betydligt, om denna reduction anbringas.

Så t. ex. återföres derigenom $n \overline{\odot} (r \odot \alpha) = r \odot (n \overline{\odot} \alpha)$ till $\nu \odot (r \odot \alpha) =$ $= r \odot (\nu \odot \alpha)$, om $\nu = \frac{1}{n}$; och öfverhufvud de fleste af formlerne 1′ - - - 5′) till sina motsvarande 1 - - - 5) med undantag af 4′ och′ 5′), som bibehålla något eget. Det sednare är ock fallet med de flesta af 1″—5″).

O. Men huru bevisar man dessa alla så allmänna satser?

J. I det hela på samma sätt, som de motsvarande i proportionsläran. För att dock genast komma till målet, kunna vi antaga som grundsats, att vid fråga om hufvud-värdena gäller den grundregel, att *när man gör samma operation* med lika storheter, så fås lika facit. Dessutom härledes hvar och en af de sistnämnda satserna hufvudsakligen af den motsvarande bland de föregående, såsom t. ex. denna 2″) om $\alpha \overline{\odot} a = \beta \overline{\odot} b$, så är ock $\alpha \overline{\odot} a = (\alpha|\beta) \overline{\odot} (a|b)$ af 2) eller $n \odot (a|b) = (n \odot a)(n \odot b)$ alldeles såsom ske kan i proportionsläran, der den lyder så: om $\alpha : a = \beta : b$ så är $\alpha : a = (\alpha + \beta) : (a + b)$. Ty sätt, såsom sades, $n \odot a = \alpha$ och $n \odot b = \beta$, så är först i omvänd ordning $n = \alpha \overline{\odot} a = \beta \overline{\odot} b$ och sedermera enligt Theor. 1) och 2) $\alpha|\beta = (n \odot a) | (n \odot b) = n \odot (a|b)$, och följakteligen äfven $n = (\alpha|\beta) \overline{\odot} (a|b)$, hvaraf redan satsen är klar.

Men Herrarne torde finna dessa bevis nu öfverflödiga, då de efter denna anvisning nog sjelfva kunna complettera dem; några enkla collorarier, såsom särskilta tillämpningar eller exempel af föregående allmänna satser, kunna ses i Matheseos univers. formulæ fundamentales (Resp. Augustinson 1841).

Af de derstädes förekommande exempel ser man, huru till hvarje summa hör en motsvarande skilnad, en indifferent och en negativ storhet $(\bar{x})$ samt en produkt; hvilka naturligtvis vid + eller vanlig summa äro de vanliga, (—, *o*, $- x, n.x$), men vid multiplikation, ansedd som aggregat eller en formell summa, äro de: quot $\frac{r}{n}$, 1 och $\frac{1}{x}$ samt potens x^n, o. s. v.

Men vidare märkes, att af hvarje summa utbildas en mångfald eller en product, och tvenne des omvända, som äro dels en allmän *aliquot del* $(n \overline{\odot} \alpha)$; och dels en *allmän rations-exponent* $(\alpha \overline{\odot} a)$; om nemligen $n \odot a = \alpha$, så säges tvärtom $a = n \overline{\odot} \alpha$ (= en högre aliquot del af α), och $n = \alpha \overline{\odot} a$ (= en högre rations-exponent mellan α och a), och man bör naturligtvis äfven känna dessa

från den formella additionen utbildade operationer, likaväl som den vanliga producten och rations-exponenten.

Men härvid är ännu mera att märka, nemligen först det ganska hufvudsakliga, att, enligt satserne 4″) och des coroll. kan en högre formell summa återföras till den vanliga förmedelst des product och dennes omvända. Om vi nemligen sätta $x \overline{\odot a} = \wedge x$, såsom varande tydligen beroende af x och följaktligen hvad man kallar function af x, och $\wedge x = z$, eller $x \overline{\odot a} = z$, så blir tvärtom $x = z \odot a$ den omvända functionen af z, som vi kunna teckna $\overline{\wedge} z$ eller $\vee z$, och då kommer nämnde sats att lyda så: $\wedge(\alpha|\beta) = \wedge\alpha + \wedge\beta$, och den ger följakteligen också $\alpha|\beta = \vee(\wedge\alpha + \wedge\beta)$ eller den formella summan uttryckt genom den vanliga, förmedelst den förmedlande eller *separerande* functionen $\wedge$ och des omvända $\vee$. Vi se således att till hvarje aggregat $\alpha|\beta$ finnes en function φ som skiljer des poster åt, så att $\varphi(\alpha|\beta) = \varphi\alpha + \varphi\beta$, såsom till $x + y + cxy$ måste finnas en sådan function φ, att $\varphi(x + y + cxy)$ upplöses i denna summa $\varphi x + \varphi y$, och vi inse af det föregående till och med, huru denna function finnes. Vi veta nemligen att $\varphi x = \wedge x = x \overline{\odot a}$, eller den från aggregatet utbildade allmänna rations-exponenten. Det vill säga, att vi skole utaf $\alpha|\beta$ utbilda gradvis $2 \odot a = a|a$, $3 \odot a = a|a|a = \overbrace{2 \odot a}|a$, $4 \odot a = \overbrace{3 \odot a}|a$, o. s. v. ända tils man kommer till n gånger $a = n \odot a = (\overbrace{n - 1} \odot a)|a$, och derefter skall man sätta $n \odot a = z$, samt ur denna equation söka n, som då befinnes $= z \overline{\odot a}$ eller denna rations-exponent mellan z och a är just den sökta functionen φz.

Härvid är det tillika anmärkningsvärdt, att a får hafva hvilket visst värde som helst, ty huru det än tages, fås dock $\alpha|\beta = (\alpha \overline{\odot a} + \beta \overline{\odot a}) \odot a$ eller $= \vee(\wedge\alpha + \wedge\beta)$, om $\wedge\alpha$ tages $= \alpha \overline{\odot a}$ och således $x \overline{\odot a} = \wedge x$. Derföre kan man välja a så, att $2 \odot a$, $3 \odot a$, $4 \odot a$ o. s. v. blifva föga skiljaktiga och således interpolation dem emellan lätt, särdeles om en viss utveckling tages till hjelp. Man kan derföre alltid lösa equation $n \odot a = z$, varande z hvad som helst (åtminstone emellan vissa reela grenser), fast dervid n kan befinnas vara et bråk. När t. ex. z ligger emellan $3 \odot a$ och $4 \odot a$, så blir $n = 3 + w$ och $\overbrace{3 + w} \odot a = z = (3 \odot a)|(w \odot a)$, hvadan $w \odot a = z \lceil \overbrace{3 \odot a}$, som då är en gifven men liten storhet ν, och man får derefter söka $w = \nu \overline{\odot a}$ genom interpolation eller utveckling, lämpad till hvarje serskilt fall.

C. Men när producterna äro så nära lika, så skall den föra till ändlösa räkningar, innan man kommer till en som nalkas z.

J. Dervid märkes, att det är nog uträkna $2\odot a$, $4\odot a$, $8\odot a$, $16\odot a$ eller $2^\nu\odot a$, emedan hvarje helt tal n, när det skrifves dyadiskt, blir en summa af några bland dessa talen 1, 2, 4, 8, 16,... 2^ν. Så är t. ex. $21=16+4+1$, och följaktligen $21\odot a=(16+4+1)\odot a=\overparen{16\odot a}|\overparen{4\odot a}|a$. Blott dessa behöfva derföre en gång för alla beräknas.

K. Men äro dessa producter och deras omvända, aliquoterne och rationsexponenterne, alltid nya functioner?

J. Det kan stundom hända, när nemligen stundom $\alpha|\beta$ uppkommit genom enklare operationers förening, att $n\odot a$ kan genom en enkel formel uttryckas. Så t. ex. när $a|b=a+b+\gamma ab$, så är $a|b|c=(a|b)+c+\gamma c.(a|b)=$ $=a+b+c+\gamma(ab+c.\overparen{a+b})+\gamma^2 abc$, eller af formen $C_1+\gamma C_2+\gamma^2 C_3$, der C_1 C_2 och C_3 tydligen äro *bitalen* (coefficienterna) uti utvecklade faculteten $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+C_1 x^2+C_2 x+C_3$. Man kan redan deraf ana det $a|b|c|d\ldots|n$ lärer blifva $C_1+\gamma C_2+\gamma^2 C_3+ \qquad +\gamma^{n-1}C_n$, om $\overparen{x+a}\,\overparen{x+b}\,\overparen{x+c}\,\overparen{x+d}\ldots\overparen{x+n}=x^n+C_1 x^{n-1}+C_2 x^{n-2}+\ldots+C_n$, hvilket ock lätt bevises (medelst formlen $a|b|\ldots|n|p=(a|b\ldots|n)|p=$ $(a|b\ldots|n)+p+\gamma.(a|b\ldots|n).p$, och tillfogande af factorn $x+p$ i sednare equationen). Derföre när nu a tages $=b=c=d$ etc., så fås $n\odot a=$ $=C_1+\gamma C_2+\gamma^2 C_3+\ldots\gamma^{n-1}C_n$, om C_1 C_2 etc. numera äro sådana, att $\overparen{x+a}^n=$ $=x^n+C_1 x^{n-1}+C_2 x^{n-2}+.+C_n=x^n+nax^{n-1}+n_2 a^2 x^{n-2}+\ldots+a^n$, och således $C_1=na$, $C_2=n_2 a^2=n\frac{n-1}{2}a^2$, o. s. v., hvarföre $n\odot a=$ $=na+n_2 a^2\gamma+n_3 a^3\gamma^2+\ldots+a^n\gamma^{n-1}$ och $\gamma.\overparen{n\odot a}=$ $=na\gamma+n_2\overparen{a\gamma}^2+n_3\overparen{a\gamma}^3+.+\overparen{a\gamma}^n=(1+a\gamma)^n-1$, hvadan $n\odot a=\frac{\overparen{1+a\gamma}^n-1}{\gamma}$, eller den til summan $a+b+\gamma ab$ hörande producten är denna combinerade potens $\frac{\overparen{c+a\gamma}^n-1}{\gamma}$ hvilken formel man lätt kan besanna förmedelst alla producters grundformel $(n+r)\odot a=\overparen{n\odot a}|\overparen{r\odot a}$.

O. Det vill jag försöka.

J. Ja väl. Men vidare märke vi, att ock producten kan uttryckas genom

functionen $\bigwedge$, enligt vårt Corollarium $n\odot\beta=\Big(n.(\beta\odot\overline{a})\Big)\odot a$, sålunda $n\odot\beta=$ $=\bigvee(n.\bigwedge\beta)$, d. ä. den allmänna producten med hvad föregående (n) och hvad efterföljande term (β) som helst uttryckes genom en särskilt, der den efterföljande (a) är någon viss storhet. Så om $a|b=a.b$, och följaktligen $n\odot a=a^n$, så är också $\bigwedge(a|b)=\bigwedge(a.b)=\bigwedge a+\bigwedge b$ och $\bigwedge(n\odot a)=n.\bigwedge a$ samt $a.b=$ $=\bigvee(\bigwedge a+\bigwedge b)$ och $n\odot a=\bigvee(n.\bigwedge a)$, och den härtill behöfliga functionen $\bigvee$ och des omvända $\bigwedge$ fås genom utväljande af en viss potens t. ex 10^n och des sättande $=n\odot 10=\bigvee n=z$, samt genom behörig lösning af denna equation, hvarigenom man måste få $n=\bigwedge z$.

C. När jag löser denna $10^n=z$, så får jag $n=$ Brig. Log. z.

J. Alldeles. I detta fall är således functionen $\bigwedge$ ej annat än en vanlig logarithm L, eller $n=\bigwedge z=Lz$, och omvändt $z=\bigvee n=\mathrm{\daleth}n=10^n$, hvarföre $a^n=n\odot a=\bigvee n\bigwedge a=\mathrm{\daleth}n\,La=10^{n\,La}$, och derföre anser jag den motsvarande $\bigwedge$ i det allmänna fallet för en *allmän logarithm*, en *hyperlogarithm*, och des omvända $\bigvee$ för en allmän *exponential* eller en allmän *antilogarithm*, helst som dessa functioner hafva en märkvärdig analogie med de vanliga functionerna af samma namn, och spela en så stor role i hela denna lära.

B. Hvad Logarithm hör till $a+b$? Jo låt se, först är des product den vanliga $n.a$, så, om jag sätter $n.a=z$, får jag $n=\frac{z}{a}$, hvilket således skulle vara hyper- eller kanske snarare hypologarithmen för en enkel summa. Också är $\frac{x+y}{a}=\frac{x}{a}+\frac{y}{a}$.

J. Man kan ock taga $a=1$, så att, när $|$ är $+$, blir $\bigwedge x=x$. Eller hypologarithmen för x ej annat än sjelfva x. I allmänhet märkes, att när $\bigwedge x$ är en hyperlogarithm, så är $C.\bigwedge x$ en dylik för samma formella summa, hvilket härrör deraf att equation $\bigwedge(\alpha|\beta)=\bigwedge\alpha+\bigwedge\beta$ blir likadan om den multipliceras med någon arbiträr constant C och för $C.\bigwedge$ skrifves $\bigwedge$ (eller $\bigwedge'$).

O. Men det sades, att otaliga aggregationer finnas.

J. Vi äro nu beredde att bevisa detta, särdeles om det medgifves att otaliga functioner (φx) med ett argument x finnes. Låt nemligen φx vara en sådan och $\overline{\varphi}z$ des omvända (eller värdet på x ur equationen $\varphi x=z$), och låt oss lösa equationen $\varphi u=\varphi x+\varphi y$ i anseende till u, så säger jag att u blir et

aggregat af x och y, och således kan tecknas med $u=x|y$, eller tills vidare blott med $u=x_1 y$, som tydligen också är $=y_1 x$, eller symmetrisk, eftersom φu äfven $=\varphi y+\varphi x$. Ty låt oss lägga till φz, och sätta $\varphi t=\varphi u+\varphi z=$ $=\varphi x+\varphi y+\varphi z$ samt $\varphi y+\varphi z=\varphi w$, så blir tydligen härur $t=z_1 u$ och $w=$ $=y_1 z$; men då $\varphi t=\varphi x+\varphi y+\varphi z=\varphi x+\varphi w$, så är också $t=x_1 w$, och följakteligen $z_1 u=x_1 w$, när $u=x_1 y$ och $w=y_1 z$, och följakteligen, när dessa värden införas i föregående likhet, blir $z_1(x_1 y)=x_1(y_1 z)$ samt äfven $x_1 y=$ $=y_1 x$). Men genom dessa begge equationerne kan hypersymmetrien ådagaläggas, (ja des tillvaro kan redan märkas af equation $\varphi z+\varphi(x_1 y)=$ $=\varphi x+\varphi y+\varphi z$), som tydligen är symmetrisk till x, y och z). Ty då är genom förening af begge $z_1(y_1 x)=x_1(y_1 z)$, så att ordningen får vändas om. Vidare säga vi att alltid, om $y_1 x=\xi$ ger $y=\xi_1 \bar{x}$, så är $(\xi_1 \bar{x})_1 z=z_1(\xi_1 \bar{x})=$ $=(z_1 \xi)_1 \bar{x}$. Ty då är $z_1 \xi=z_1(y_1 x)=x_1(y_1 z) = (y_1 z)_1 x$ och följakteligen $(z_1 \xi)_1 \bar{x}=y_1 z=z_1 y=z_1(\xi_1 \bar{x})$. Särdeles är derföre $(x_1 \bar{y)}_1 x=(x_1 \bar{x})_1 y$. Men nu emedan alltid $x_1 y=y_1 x$, så blir således häraf och af föregående $y=(x_1 \bar{y)}_1 x=(x_1 \bar{x})_1 y$ och följakteligen, genom ny öfverflyttning af det högra y, blir $y_1 \bar{y}=x_1 \bar{x}$ hvad än x och y äro. Men detta är icke möjligt utan att hvardera sidan är en af x och y oberoende storhet eller en viss constant c, hvarföre alltid $x_1 \bar{x}=c$ och således $x=c_1 x$, eller c en sådan storhet (eller des grens 0 eller ∞) att, hvad än x är, dock alltid $c_1 x$ eller $x_1 c=x$. Operationen hvars tecken $(_1)$ är, eger således en indifferent (c). Men den var ock sådan att $z_1(y_1 x)=x_1(y_1 z)$, följakteligen är den hypersymmetrisk, eller $x_1 y$ är et *aggregat* eller en formel summa $(x|y)$. Och följakteligen finnes det lika många sådane, som det finnas functioner med et argument, och då dessas antal ej kan nekas vara oändligt, så har vår lära en oändlig utsträckning och omfattar den betydligaste delen af Mathematiken. Sådane enkla functioner utbildas nemligen gradvis ur henne sjelf: af hvarje aggregat $a|b$ fås nemligen en enkel function $a|x$, om blott ena termen anses variabel, och af detsamma bildas en product $n\odot a$, der än den ena och än den andra termen kan anses för variabel, hvarigenom tvenne enkla functioner uppkomma $x\odot a$ och $n\odot x$; vidare kan af et annat aggregat $a|'b$ flere dylika erhållas φx, ψx, och nya mera förveklade fås genom förening häraf, eller genom att för begge termerne sätta kän-

da functioner af x, hvarigenom $\varphi x | \psi x = Fx$ och $\psi x \odot \varphi x = Gx$ uppkomma, o. s. v. i oändlighet.

O. De äro visserligen legio.

J. Så t. ex. om vi för enkelhet skull sätte

$$\varphi x = 1)\, a\,.\,x,\quad 2)\, b(a+x),\quad 3)\, x^a,\quad 4)\, a^x,\quad 5)\, Lx,\quad 6)\, \frac{a+bx}{\alpha+\beta x}$$

$$\text{och således } \overline{\varphi} x = \quad x:a,\quad \frac{x}{b}-a,\quad \sqrt[a]{x},\quad \underset{a}{L}x,\quad \daleth x,\quad \frac{\alpha x - a}{b-\beta x}$$

$$\text{så blir } u|v = \quad u+v,\quad u+v+a,\quad \sqrt[a]{u^a+v^a},\quad \underset{a}{L}(a^u+a^v),\quad uv,\quad \frac{A_0+A_1\,\overset{\frown}{u+v}+A_2 uv}{B_0+B_1\,\overset{\frown}{u+v}+B_2 uv}$$

i hvilket sednare fall dock bitalen A och B finnas så bero af hvarandra, att $u|v$ kan föreställas med $\frac{1+n(u+v)+r(2n-r)uv}{n-2r-r^2(u+v)-nr^2.uv}$, hvilket går ut på detsamma som att sätta $b=an$ och $\beta=\alpha r$, hvarigenom hyperlogarithmen härtill blir $\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{1+nx}{1+rx}$ eller blott $\frac{1+nx}{1+rx}$, enär den constanta factorn får vara arbiträr; men detta går ut på detsamma som att göra $a=1=\alpha$, då $u|v$ blir $\frac{1+b(u+v)+(2b-\beta)\beta.u.v}{b-2\beta-\beta^2(u+v)-b\beta^2 uv}$. Härvid är dock tillika att anmärka de särskilta fall, då 6′) $\alpha=0$ & $a=1$, hvarigenom man får $u|v = \frac{uv}{u+v+buv}$ med $\varphi x = \wedge x = = \frac{1}{\beta}.\left(b+\frac{1}{x}\right)$, och 6″) när $a=0$ & $\alpha=1$, eller $\varphi x = \frac{bx}{1+\beta x}$, som ger $u|v = \frac{u+v+2\beta uv}{1-\beta^2 vu}$, i hvilka fall man lätt märker att factorerna $\frac{1}{\beta}$ och b ej ingå i $u|v$. De till dessa aggregater hörande producterne $r\odot x = \varphi(r.\varphi x)$ äro

1) $r.x$, 2) $r.(a+x)-a$, 3) $r^{1:a}x$, 4) $x+\underset{a}{L}r$, 5) x^r, och 6) $\frac{r(1+bx)-(1+\beta x)}{b(1+\beta x)-r(1+bx)}$

samt 6′) $\frac{x}{r+\overset{\frown}{r-1}\,bx}$ och 6″) $\frac{rx}{1+\overset{\frown}{1-r}\,\beta x}$, och sättes hvar och en af dessa $=x$, och löses till x eller r, så fås de motsvarande quoterne $(\overline{r\odot z})$ och rations-exponenterne $(\overline{z\odot x})$, om hvilka de förut framstälda theoremerna måste gälla. Den som lyster kan ock pröfva dessa à posteriori eller concret uti dessa exempel.

S. Det vill jag vid ledighet försöka.

J, Hvad som härvid är ganska väsendtligt är, det alltid, så snart man funnit et aggregat, eller en function $x|y$ af egenskapen $x|(y|z)=z(y|x)$, med $x|I=x$; så måste det alltid finnas en function $\wedge$ som är des *hyperlogarithm* och en $\vee$ som är des *antilogarithm* eller exponential, och hvilka hafva dessa märkvärdiga egenskaper: $\wedge(x|y)=\wedge x+\wedge y$, samt $\vee x|\vee y=\vee(x+y)$, hvilken sednare egenskap är en lätt följd af den förra eller denna grundformel $(x+y)\odot c=$ $=\widehat{x\odot c}|\widehat{y\odot c}$, genom hvilka dessa functioner alltid äro beräkneliga, om de än icke annorlunda skulle kunna uttryckas.

Det förra är nu fallet med otaliga functioner, och således finnas otaliga functioner med kända egenskaper. Så t. ex. kan det lätt visas, att $\frac{x+y+2\beta xy}{1-cxy}$ är additiv eller kan föreställas med $x|y$ eller egendomligt med x♀y, (så att den icke blott är symmetrisk, utan äfven hypersymmetrisk, eller af egenskapen $(x|y)|z=x|(y|z)$ som uttrycker full symmetri till både x, y och z); följakteligen måste det finnas functioner $\wedge$ & $\vee$ sådane att $\wedge(x$♀$y)=$ $=\wedge x+\wedge y$ och $\vee x$♀$\vee y=\vee(x+y)$.

Är $c=\beta^2$, så äro dessa $\wedge x=\frac{x}{1+\beta x}$ och $\vee x=\frac{x}{1-\beta x}$ och således mycket enkla algebraiska functioner; men annars måste de i alla fall kunna föreställas med $\wedge x=x$♀$\bar{a}$, och $\vee x=x$♀a, så att $\vee x$ är en till föregående summa hörande product och $\wedge x$ en rations-exponent, hvaraf dessa functioners vetenskapliga betydelse bestämmes. Är $\beta=o$, så förenklas denna högre (eller formella) summa till $\frac{x+y}{1-cxy}$, och är c negativt, så kan väl des product uttryckas genom potenser under formen $\frac{\widehat{1+ax}^{\,r}-\widehat{1+bx}^{\,r}}{a\widehat{1+bx}^{\,r}-b\widehat{1+ax}^{\,r}}$, men då härtill a & b måste bestämmas uti c genom en quadratisk equation, så befinnas de imaginära, när c är positiv, och nämnde formel har då ingen tillämplighet, hvarföre till summan $\frac{x+y}{1-xy}$ hör en *egen* ej i andra reelt upplöslig *product* $r\underset{*}{\odot}x$, som vanligen kallas *tangenten* för r (särdeles om x tages$=1$), och hvilken derföre ej är